ไคสแควร์

ฉัตรศิริ ปิยะพิมลสิทธิ์*

การแจกแจงไคสแควร์

การแจกแจงไคสแควร์ถูกกำหนดโดยสมการ

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\chi^{2[(k/2)-1]}e^{-(\chi^2)/2}$$

เมื่อมองดูสมการยุ่ง ๆ นี้แล้ว ผู้อ่านที่ไม่ได้ทำงานคลุกคลีอยู่กับคณิตศาสตร์ก็ไม่ต้องตกใจ เราจะพิจารณาลักษณะเด่นเพียงบางประการเท่านั้น และก็จะเข้าใจการแจกแจง χ^2 ทั้งหมด ประการแรกที่จะพูดถึงก็คือเทอมของ $\Gamma(k/2)$ จะเรียกว่าฟังก์ชันแกมมา (gamma function) ซึ่งก็คือความหมายแฟคทอเรียล เมื่อ $(k/2)$ คือจำนวนเต็มแล้ว $\Gamma(k/2) = [(k/2)-1]!$ แต่ฟังก์ชันแกมมาบางครั้งก็ไม่ได้เป็นจำนวนเต็มเสมอไป

ประการที่สองและเป็นลักษณะที่สำคัญมากของสมการการแจกแจงคือค่าพารามิเตอร์ (k) เมื่อการแจกแจงแบบปกติมีฟังก์ชันพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ μ และ σ ส่วน χ^2 ก็มีฟังก์ชันพารามิเตอร์ k เพียงตัวเดียว เมื่อเราไม่มองมันไปในเชิงคณิตศาสตร์ แต่หันมามองในเชิงสถิติ k ก็คือค่าองศาแห่งความเป็นอิสระ (degree of freedom) นั่นเอง เราอาจเขียนองศาแห่งความเป็นอิสระในรูปของตัวห้อยของ χ^2 ดังนั้น χ^2_3 อ่านว่า ไคสแควร์ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น 3 มีวิธีเขียนอีกแบบหนึ่งก็คือ $\chi^2(3)$

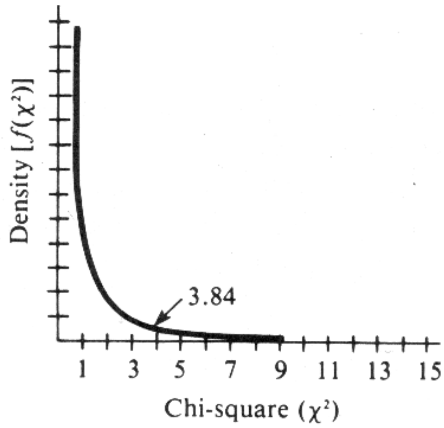
ภาพประกอบ 1 แสดงกราฟของการแจกแจงไคสแควร์ที่มี k ต่างกัน จากรูปภาพจะเห็นว่าการแจกแจงเปลี่ยนไปเมื่อ k เปลี่ยน การแจกแจงจะเริ่มมีความสมมมาตรเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อค่า k เพิ่มขึ้น มันจะปรากฏค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจง χ^2 ที่เพิ่มขึ้นกับค่าที่เพิ่มขึ้นของ k และมีความสัมพันธ์โดยตรงกับ k โดยที่

ค่าเฉลี่ย = k ; ความแปรปรวน = 2k

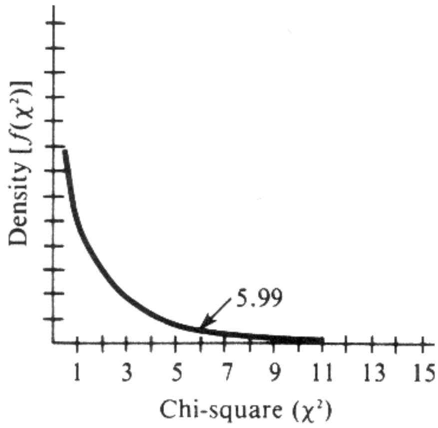
---

* กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา) http://www.watpon.com

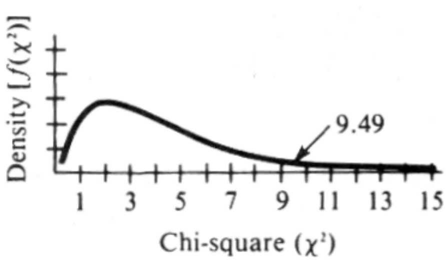
ภาพประกอบ 1 แสดงการแจกแจงไคสแควร์เมื่อ df = 1, 2, 4 และ 8



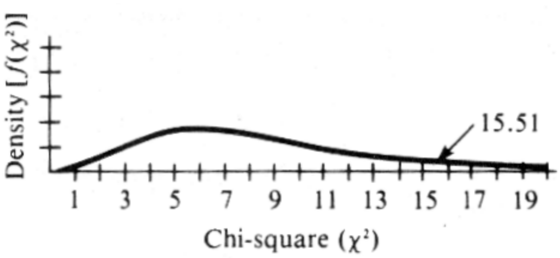
ก) df = 1



ข)   df = 2



ค) df = 4



ง)   df = 8

สถิติที่สำคัญของการแจกแจง χ^2

การแจกแจง χ^2 มีความสัมพันธ์กับสถิติตัวอื่น ๆ ดังรายละเอียดดังนี้

ไคสแควร์และ Z

สมมติว่าเรามีประชากรที่มีการแจกแจงเป็นปกติ มีค่าเฉลี่ย (μ) และความแปรปรวน (σ) แล้วสุ่มตัวอย่างมาสังเกตเพียง 1 คน นำค่าที่ได้มาคำนวณในสูตร

$$\mathbf{Z}^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$$

บันทึกค่า $\mathbf{Z}^2$ ที่คำนวณได้ไว้ และสังเกตซ้ำเป็นจำนวนอนันต์ครั้งเราจะได้ค่า $\mathbf{Z}^2$ จำนวนอนันต์ค่า เมื่อสร้างกราฟการแจกแจงของ $\mathbf{Z}^2$ แล้วจะพบว่าการแจกแจงของ $\mathbf{Z}^2$ เหมือนกับการแจกแจง χ^2 ที่มี df เป็น 1

$$\chi^2(1) = \mathbf{Z}^2$$

สมมติว่าแทนที่การสังเกตเพียง 1 คน จำนวน 1 ครั้ง มาเป็นการสังเกต N คน จำนวน 1 ครั้ง แล้วนำคะแนนที่สังเกตได้แต่ละคนมาคำนวณหาค่า $\mathbf{Z}^2$ และคำนวณ $\Sigma\mathbf{Z}^2$ ผลรวมนี้ได้มา

จากการสังเกต N คน จากนั้นเราทำซ้ำกระบวนการเดิมอนันต์ครั้ง เราจะสามารถสร้างกราฟการแจกแจง $\Sigma \mathbf{Z}^2$ ได้ และจะพบว่ามีลักษณะเหมือนการแจกแจง χ^2 ที่มี df = N

$$\chi^2 (N) = \sum_{i=1}^{N} Z_i^2 = \Sigma \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

ไคสแควร์และความแปรปรวน

สมมติว่าประชากรกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ และรู้ค่าความแปรปรวน (σ^2) จากประชากรนี้ เราสุ่มกลุ่มตัวอย่างมา N ค่า จำนวนอนันต์ครั้ง และในการสุ่มแต่ละครั้งคำนวณหาค่าความแปรปรวน (s^2) จากนั้นเราจะนำค่าความแปรปรวนแต่ละค่ามาแจกแจงเป็นการแจกแจงความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง การแจกแจงนี้มีความสัมพันธ์ทางตรงกับการแจกแจง χ^2

$$\chi^2 (N - 1) = \frac{(N-1)s^2}{\sigma^2}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$s^2 = \frac{\chi^2 \sigma^2}{N-1}$$

ในเศษส่วน $\sigma^2/(N - 1)$ คือค่าคงที่สำหรับความแปรปรวนของประชากรและขนาดกลุ่มตัวอย่าง การแจกแจงของ s^2 จะแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับค่า χ^2

การทดสอบไคสแควร์กรณีตัวแปรเดียว

ในการทดสอบไคสแควร์กรณีตัวแปรเดียวเรียกชื่อหนึ่งว่า การทดสอบความกลมกลืน (Goodness of fit test)

พิจารณาการสัมภาษณ์ประชาชน 100 คน ในการเลือกดื่มกาแฟ 2 ยี่ห้อ

ผลการสัมภาษณ์ปรากฏว่า มี 65 คน เลือกดื่มกาแฟยี่ห้อ A และ 35 คนเลือกดื่มยี่ห้อ B เราจะให้จำนวนประชาชนแทนด้วย N จำนวนผู้เลือกดื่มกาแฟยี่ห้อ A แทนด้วย X และจำนวนผู้เลือกดื่มกาแฟยี่ห้อ B แทนด้วย N – X ข้อมูลอาจจะนำเสนอในตารางได้ดังนี้

A	B	รวม
X	N – X	N
65	35	100

ต้องการทราบว่าประชาชนโดยส่วนใหญ่ชอบดื่มกาแฟยี่ห้อไหนมากกว่า ในที่นี้เราอาจจะอ้างอิงความถี่ของผู้ที่ชอบกาแฟ 2 ยี่ห้อนี้ 50 : 50 คือความคาดหวังว่าประชาชนจะชอบกาแฟ

ยี่ห้อละครึ่งหนึ่ง แต่จากข้อมูลนี้เราสามารถจะทำการทดสอบว่าข้อมูลที่เก็บมานี้เป็นไปตามความคาดหวังหรือไม่ โดยใช้การทดสอบไคสแควร์ แต่เรารู้ว่า

$$\chi^2(1) = Z^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$$

เมื่อ X ถูกสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ กับค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 เรารู้ว่าประชาชนเลือกกาแฟอย่างสุ่ม จำนวนประชากรที่เลือกยี่ห้อของกาแฟจะมีลักษณะเป็นการแจกแจงแบบไบโนเมียลกับค่าเฉลี่ย = Np และความแปรปรวน = Npq นำไปแทนในสมการข้างต้นได้

$$\chi^2(1) = Z^2 = \frac{(X-Np)^2}{Npq}$$

χ^2 ในสมการจะเป็นการประมาณค่าการแจกแจงของ χ^2

โดยปกติการเขียนสูตรไคสแควร์ เราจะใช้ O_i แทนความถี่ที่สังเกตได้ เช่น (65 และ 35) และ E_i แทนความถี่ที่คาดหวัง ตัวอย่างเช่น O_1 คือจำนวนของประชาชนที่เลือกกาแฟยี่ห้อง A และ O_2 คือจำนวนของประชาชนที่เลือกกาแฟยี่ห้อ B เราจะขยายสูตรได้ดังนี้

$$\chi^2(1) = \frac{(X-Np)^2}{Np} + \frac{(N-X-Nq)^2}{Nq}$$

แทน O_i และ E_i ในสมการ

$$\chi^2 = \frac{(O_1-E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2-E_2)^2}{E_2}$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งว่า

$$\chi^2 = \Sigma\frac{(O-E)^2}{E}$$

นี่คือสูตรล่าสุดที่เป็นสูตรปกติในการทดสอบไคสแควร์

ตัวอย่าง ในการทดสอบความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการสอนของครู ได้ผลดังนี้

ความคิดเห็น	ชอบ	เฉย ๆ	ไม่ชอบ	รวม
จำนวนนักเรียน	18	10	8	36

ค่าที่ปรากฏในตารางคือความถี่ที่สังเกตได้ แล้วทำการทดสอบจำนวนนักเรียนที่แสดงความคิดเห็นต่าง ๆ กันจะแตกต่างกันหรือไม่

เขียนเป็นสมมติฐานได้ว่า

H_0 : นักเรียนที่แสดงความคิดเห็นในระดับต่าง ๆ มีจำนวนไม่แตกต่างกัน

H_1 : นักเรียนที่แสดงความคิดเห็นในระดับต่าง ๆ มีจำนวนแตกต่างกัน

จากสูตร

$$\chi^2 = \frac{(X-Np)^2}{Np} = \frac{(O-E)^2}{E}$$

เราจะต้องหา p คือความน่าจะเป็นของกลุ่มตัวอย่างที่จะเป็นสมาชิกในเซลนั้น ในที่นี้มี 3 เซล ความน่าจะเป็นคือ 1/3, p = 1/3 แล้วหาค่า Np จะได้ (1/3)(36) = 12 ดังตาราง

ความคิดเห็น	ชอบ	เฉย ๆ	ไม่ชอบ
ความถี่ที่สังเกตได้	18	10	8
ความถี่ที่คาดหวัง	12	12	12

แทนค่าในสมการดังนี้

$$\chi^2 = \frac{(O-E)^2}{E}$$

$$= \frac{(18-12)^2}{12} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(8-12)^2}{12}$$

$$= 4.67$$

Degree of **F**reedom

ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระของไคสแควร์กรณีตัวแปรเดียวนั้น จะขึ้นอยู่กับจำนวนของเซล ไม่ใช่จำนวนกลุ่มตัวอย่าง สมมติว่าเรามีจำนวนกลุ่มตัวอย่าง 100 คน อยู่ใน 4 กลุ่ม ซึ่ง 3 กลุ่มแรกจะมีค่าดังตารางต่อไปนี้

	A	B	C	**D**	
O	30	20	40	?	N = 100

ในกลุ่มสุดท้ายจะต้องเป็น 10 เท่านั้น ถึงจะถูกต้อง ดังนั้นค่าในกลุ่มที่ 4 จะไม่มีความเป็นอิสระ จะมีเพียงเฉพาะ 3 กลุ่มแรกเท่านั้นที่สามารถแปรค่าได้อย่างอิสระ ดังนั้นองศาแห่งความเป็นอิสระจึงเท่ากับ จำนวนกลุ่มลบด้วย 1 หรือ k −1 หรือ 4 − 1 = 3 นั่นเอง ไม่ว่าจำนวนกลุ่มตัวอย่างจะมีเป็น 100 หรือเป็น 1000 ก็ตาม

การใช้ตารางการแจกแจงไคสแควร์

เรามีการอ้างอิงถึงค่า χ^2 เราต้องนำมาเกี่ยวข้องกับการแจกแจง χ^2 ในการกำหนดความน่าจะเป็นของค่า χ^2 ที่ต่ำที่สุด

ตารางการแจกแจงของ χ^2 เหมือนกับตารางสถิติทั่ว ๆ ไป แต่ดูเหมือนคนทั่ว ๆ ไปจะบอกว่ามันยาก ในที่นี้เราจะอธิบายอย่างง่าย ๆ ดังนี้

ให้พิจารณาตาราง χ^2 ในทางสดมภ์ทางด้านซ้ายสุด เราจะพบองศาแห่งความเป็นอิสระ (degree of freedom) ส่วนสดมภ์อื่น ๆ เป็นค่าเกณฑ์ของ χ^2 เป็นเปอร์เซ็นต์จุดตัดของการแจกแจงถูกกำหนดโดยระดับนัยสำคัญซึ่งตั้งอยู่ด้านบนของสดมภ์ ดังตัวอย่าง คุณจะเห็นค่า χ^2 ที่ df = 2 ระดับนัยสำคัญที่ 0.05 จะได้ค่า χ^2 = 5.99 เป็นจุดตัดของการแจกแจง ถ้าค่า χ^2 ที่คำนวณได้สูงกว่าจุดตัดจะปฏิเสธ H_0 ยอมรับ H_1 ถ้าค่า χ^2 ที่คำนวณได้ต่ำกว่าจุดตัดจะยอมรับ H_0

จากตัวอย่าง χ^2 = 4.67 ที่ df = จำนวนระดับของตัวแปรหักออก 1 ในที่นี้ตัวแปรความคิดเห็นแบ่งออกเป็น 3 ระดับคือ ชอบ เฉย ๆ และไม่ชอบ เท่ากับ 3 ระดับและหักออก 1 ดังนั้น df = 3 – 1 = 2 เปิดค่า χ^2 จากตารางได้ 5.99 ที่ระดับ .05 ดังนั้น χ^2 ที่คำนวณ = 4.67 น้อยกว่าค่า χ^2 จากตาราง เราจะยอมรับสมมติฐาน H_0 นั่นคือความคิดเห็นของนักเรียนจะไม่แตกต่างกัน

การทดสอบไคสแควร์กรณี 2 ตัวแปร

เมื่อเรามีตัวแปร 2 ตัวและต้องการทราบว่า ตัวแปรทั้งสองมีความเป็นอิสระกันหรือไม่ เช่น เราอาจจะอยากรู้ว่า ชนิดของดนตรีมีความเป็นอิสระกับเพศหรือไม่ โดยตัวแปรทั้ง 2 ตัว จะต้องถูกแบ่งออกเป็นกลุ่ม ๆ (Categories)

เมื่อเราอยากจะทราบเกี่ยวกับตัวแปร 2 ตัวว่าเป็นอิสระหรือไม่ ข้อมูลจะต้องนำมาใส่ในตารางความสอดคล้อง ดังนั้นการประเมินความสัมพันธ์ระหว่างชนิดของดนตรีและเพศ เราสร้างตารางให้ตัวแปรเพศปรากฏในมิติแรกและชนิดของดนตรีปรากฏในมิติที่สอง

	หญิง	ชาย
ชอบแจ๊ส		
ไม่ชอบแจ๊ส		

ในแต่ละเซลจะใส่จำนวนของความถี่เป็นข้อมูล จำนวนของผู้ชายและผู้หญิง จำนวนของผู้ชอบแจ๊สและไม่ชอบแจ๊ส

<u>ตัวอย่าง</u> การทดลองหนึ่ง สุ่มตัวอย่างนักเรียนห้อง ก 12 คน และห้อง ข 12 คน ให้มาปฏิบัติงานชิ้นหนึ่ง เพื่อดูสมรรถภาพการทำงาน ภายในระยะเวลาที่จำกัด

ข้อมูลถูกนำเสนอดังตารางข้างล่าง เมื่อเซลแต่ละเซลบรรจุจำนวนของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มที่ทำงานเสร็จและไม่เสร็จ ดังนั้น สำหรับตัวอย่างนี้ ในกลุ่มห้อง ก มี 10 คนที่ทำงานไม่เสร็จ ที่เหลือทำงานเสร็จ และกลุ่มห้อง ข ทำงานเสร็จ 11 คน ที่เหลือทำงานไม่เสร็จ

	งานเสร็จ	ไม่เสร็จ	
ห้อง ก	10	2	12
ห้อง ข	1	11	12
	11	13	24

เขียนสมมติฐานได้ดังนี้

H_0 : ไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มและความสำเร็จของงาน

H_1 : มีความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มและความสำเร็จของงาน

การดัดแปลงสูตรสำหรับไคสแควร์จะต้องสอดคล้องกับความเป็นจริงของข้อมูลที่มีลักษณะเป็น 2 มิติ เราจะใช้ X_{ij} และ p_{ij} แทนที่ X_i และ p_i ในรูปแบบใหม่ i จะบ่งชี้ถึงจำนวนของแถวและ j จะบอกถึงจำนวนของสดมภ์ ดังนั้น X_{12} คือจำนวนในแถวที่ 1 สดมภ์ที่ 2 มีค่า 2 เราสามารถเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\chi^2 = \Sigma\frac{(X_{ij} - Np_{ij})^2}{Np_{ij}} = \Sigma\frac{(O-E)^2}{E}$$

การคำนวณความถี่ที่คาดหวัง

ถ้าตัวแปรที่ศึกษาเป็นอิสระจากกันแล้ว ความน่าจะเป็นของกลุ่มตัวอย่างที่จะเป็นสมาชิกในเซล 11 (กลุ่ม ก, งานเสร็จ) จะเท่ากับความน่าจะเป็นของสมาชิกในแถว 1 คือ 12/24 คูณกับความน่าจะเป็นของสมาชิกในสดมภ์ 1 คือ 11/24 ดังนั้นความน่าจะเป็นของกลุ่มตัวอย่างในแถว 1 สดมภ์ 1 (เซล 11) คือ

$$p_{11} = (12/24)(11/24)$$

จากสูตรเราต้องการ Np_{ij} ไม่ใช่ p_{ij} ดังนั้น จำนวนกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดในการทดลองคือ 24 จะได้

$$\begin{aligned} Np_{11} &= (24)(12/24)(11/24) \\ &= \frac{12(11)}{24} \\ &= 5.5 \end{aligned}$$

ถ้าเราให้ RT, CT และ N แทนผลรวมตามแนวแถว, ผลรวมตามแนวสดมภ์ และผลรวมทั้งหมด เมื่อเราเข้าใจหลักการแล้วเราสามารถหาความถี่ที่คาดหวังได้โดย

$$E_{ij} = Np_{ij} = \frac{(RT_i)(CT_j)}{N}$$

การคำนวณไคสแควร์

เมื่อหาความถี่ที่คาดหวังได้แล้ว เราสามารถวิเคราะห์ข้อมูลในตัวอย่างได้ ความถี่ที่คาดหวังและความถี่ที่สังเกตได้นำเสนอในตารางด้านล่างนี้

	ความถี่ที่สังเกตได้			ความถี่ที่คาดหวัง		
	เสร็จ	ไม่เสร็จ		เสร็จ	ไม่เสร็จ	
ห้อง ก	10	2	ห้อง ก	5.5	6.5	12
ห้อง ข	1	11	ห้อง ข	5.5	6.5	12
	11	13		11	13	24

ในการคำนวณไคสแควร์ เราจะอ้างอิงถึงความถี่ที่คาดหวัง

$$
\begin{aligned}
\chi^2 &= \Sigma\frac{(O-E)^2}{E} \\
&= \frac{(10-5.5)^2}{5.5}+\frac{(2-6.5)^2}{6.5}+\frac{(1-5.5)^2}{5.5}+\frac{(11-6.5)^2}{6.5} \\
&= \frac{(4.5)^2}{5.5}+\frac{(-4.5)^2}{6.5}+\frac{(-4.5)^2}{5.5}+\frac{(4.5)^2}{6.5} \\
&= 13.594
\end{aligned}
$$

องศาแห่งความเป็นอิสระ

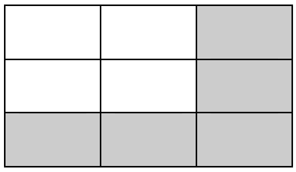
สำหรับไคสแควร์กรณี 2 ตัวแปรนั้น จำนวนองศาแห่งความเป็นอิสระจะขึ้นอยู่กับจำนวนของกลุ่มหรือระดับของแต่ละตัวแปร ตัวอย่างตาราง 2 x 2 ต่อไปนี้

A 10	B ?	40
C ?	**D** ?	60
30	70	100

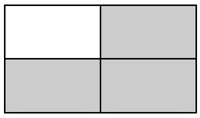
จะมีอยู่เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่สามารถแปรค่าได้อย่างอิสระ ส่วนเซลอื่น ๆ ทั้งหมดไม่มีความเป็นอิสระ ในเซล B ค่าจะถูกกำหนดด้วย 40 − 10 = 30 เท่านั้น ทำนองเดียวกัน เซล C จะต้องมีค่าเป็น 20 และเซล **D** จะต้องมีค่าเป็น 40 ดังนั้นในตาราง 2 x 2 จะมีเพียงเซลเดียวที่เป็นอิสระ ดังนั้นองศาแห่งความเป็นอิสระก็คือ 1

โดยปกติการวิเคราะห์ไคสแควร์มิได้มีเพียงตัวแปรละ 2 กลุ่มหรือ 2 ระดับเท่านั้น สมมติว่าตัวแปรตัวแปรมีจำนวน r กลุ่มและตัวแปรที่สองมีจำนวน k กลุ่ม องศาแห่งความเป็นอิสระจะมีค่าเท่ากับ $(r - 1)(k - 1)$ ดังนั้นกรณีตาราง 2 x 2 จึงมีองศาแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $(2 - 1)(2 - 1) = 1$ ถ้าเป็นตาราง 3 x 3 จะมีองศาแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $(3 - 1)(3 - 1) = 4$

ตรวจสอบการคำนวณองศาแห่งความเป็นอิสระของไคสแควร์โดยใช้มือตรวจสอบกับตารางโดยการลบออก 1 แถว กับอีก 1 สดมภ์ ดังนั้นเซลที่เหลือก็คือจำนวนขององศาแห่งความเป็นอิสระ ดังตัวอย่างตาราง 3 x 3 จะเหลือเพียง 4 เซลเท่านั้น ดังนั้น df = 4



ส่วนตาราง 2 x 2 ก็จะเหลือเพียง 1 เซล ดังนี้



สำหรับตัวอย่างในการคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มกับความสำเร็จของงานข้างต้น จะมี 2 แถว 2 สดมภ์ เราจะได้ $df = (2 - 1)(2 - 1) = 1$

การแปลความหมาย χ^2

เกณฑ์ของค่า χ^2 ที่ระดับนัยสำคัญที่ .05 และ df = 1 คือ 3.84 (ดูจากตาราง χ^2) แต่ค่า χ^2 ที่คำนวณได้คือ 13.594 เราจะปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 คือมีความสัมพันธ์กันระหว่างกลุ่มและความสำเร็จของงาน แสดงว่ากลุ่มตัวอย่างห้อง ก จะทำงานเสร็จมากกว่าไม่เสร็จ แต่กลุ่มตัวอย่างห้อง ข จะทำงานไม่เสร็จมากกว่าเสร็จ

สูตรปรับแก้ของเยสต์ (**Y**ates' Correction for Continuit**y**)

ในกรณีที่เป็นตาราง 2 x 2 เช่นในตัวอย่างข้างต้น เราอาจใช้สูตรที่ง่ายต่อการคำนวณคือตาราง 2 x 2 ข้างล่างนี้

A	B	A + B
C	**D**	C + **D**

A + C	B + D	N

สามารถเขียนเป็นสูตร χ^2 ได้ดังนี้

$$\chi^2 = \frac{N(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

จากข้อมูลในตัวอย่าง เราจะได้

10	2	12
1	11	12
11	13	24

$$\chi^2 = \frac{N(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

$$= \frac{24(110-2)^2}{(12)(12)(11)(13)}$$

$$= 13.594$$

จะเห็นได้ว่าค่าไคสแควร์ที่คำนวณจากสูตรอย่างง่ายนี้จะเท่ากับสูตรที่คำนวณในข้างต้น

ปัญหาของนักวิจัยเกี่ยวกับการใช้สูตรนี้เพราะเกิดจากการจัดกระทำกับอักษรต่าง ๆ ที่อยู่ในแต่ละเซล ดังนั้นจะต้องสังเกตว่า คูณเซล 2 เซลในแนวทแยงและบวกเซล 2 เซลตามแนวดิ่งและแนวราบ แล้วนำผลจากการคูณเซล 2 เซลในแนวทแยงมาหักลบกันแล้วยกกำลังสองคูณด้วย N และหารด้วยผลคูณของผลบวกจากเซล 2 เซล ตามแนวดิ่งและแนวราบ ถ้าผลลัพธ์ที่ได้ผิดแปลกเช่นติดลบ แสดงว่ามีบางสิ่งบางอย่างผิดพลาด

แต่ถ้าหากมีเซลใดเซลหนึ่งมีความถี่ที่คาดหวังขนาดเล็ก (ต่ำกว่า 10) ค่าที่คำนวณได้จะผิดพลาด จำเป็นจะต้องใช้สูตรปรับแก้ที่เรียกว่า **Y**ates' correction ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\chi^2 = \Sigma\frac{(|O-E|-0.5)^2}{E}$$

หรือปรับเป็นสูตรอย่างง่ายในกรณีเป็นตาราง 2 x 2 คือ

$$\chi^2 = \frac{N(|AD-BC|-\frac{N}{2})^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

ไคสแควร์กับเปอร์เซ็นต์

ถ้าใช้ไคสแควร์คำนวณกับเปอร์เซ็นต์แล้วละก็ จะต้องมีการปรับแก้ขนาดของกลุ่มตัวอย่างเสียก่อน ค่าเปอร์เซ็นต์เดียวกันมาจากขนาดตัวอย่างที่ต่างกันผลของค่าไคสแควร์จะแตกต่างกันมาก ในการปรับแก้นี้ คุณต้องคูณไคสแควร์ที่คำนวณบนพื้นฐานของเปอร์เซ็นต์ด้วย N/100 เมื่อ N ก็คือขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> การคำนวณไคสแควร์ กรณีตาราง 2 x 2 มีข้อมูลเป็นเปอร์เซ็นต์

5% (10%)	45% (40%)	50%
15% (10%)	35% (40%)	50%
20%	80%	100%

ค่าในวงเล็บคือค่าคาดหวัง สามารถคำนวณไคสแควร์ได้ดังนี้

$$\chi^2 = \frac{(5-10)^2}{10} + \frac{(45-40)^2}{40} + \frac{(15-10)^2}{10} + \frac{(35-40)^2}{40}$$

$$= 2.50 + 0.625 + 2.50 + 0.625$$

$$= 6.25$$

กลุ่มตัวอย่างมีขนาด 200 คน ดังนั้นค่าไคสแควร์ที่ถูกต้องก็คือ

$$\chi^2 = \frac{6.25(200)}{100}$$

$$= 12.50$$

เปิดค่าไคสแควร์จากตารางที่ระดับนัยสำคัญ .05 df = 1 ได้ค่า 3.84 ดังนั้นจึงปฏิเสธ H_0 ยอมรับ H_1

การวัดความสัมพันธ์

ไคสแควร์ถูกออกแบบมาเพื่อทดสอบสมมติฐาน เมื่อข้อมูลอยู่ในรูปของตารางความสอดคล้อง การทดสอบจะบอกเราว่า ตัวแปร 2 ตัวซึ่งอยู่ในตารางนั้นมีความเป็นอิสระจากกันหรือไม่ แต่จากสมมติฐานการทดสอบ มันไม่ได้บอกเราถึงระดับของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสอง บอกแต่เพียงมีความสัมพันธ์กันหรือไม่เท่านั้น

เช่น ข้อมูลจากตัวอย่างข้างต้น เมื่อทดสอบไคสแควร์แล้ว เราจะทราบแต่เพียงว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันแต่ไม่ได้บอกถึงระดับของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร พิจารณาในตารางข้างล่างนี้ ผู้หญิงมีแนวโน้มที่จะชอบสูบบุหรี่มากกว่าผู้ชาย และในตารางถัดไป ผู้หญิงเป็นผู้ไปจ่ายตลาดมากกว่าผู้ชาย แม้ว่าการทดสอบ χ^2 จะบอกความแตกต่างของทั้ง 2 สถานการณ์นั้น แต่ความแตกต่างของค่า χ^2 ไม่สามารถบอกระดับของความสัมพันธ์

มีสัมประสิทธิ์อยู่ 3 ตัวที่เราจะใช้พิจารณาบนพื้นฐานของสถิติ χ^2 และใช้ในการคำนวณได้ง่ายมาก

ตารางความสัมพันธ์ระหว่างการสูบบุหรี่กับเพศ

	พฤติกรรมการสูบบุหรี่		
	ไม่สูบบุหรี่	สูบบุหรี่	
เพศชาย	400	100	500
เพศหญิง	350	150	500
	750	250	1000

ตารางความสัมพันธ์ระหว่างการไปจ่ายตลาดกับเพศ

	พฤติกรรมการไปจ่ายตลาด		
	ไม่ไป	ไป	
เพศชาย	400	100	500
เพศหญิง	100	400	500
	500	500	1000

สัมประสิทธิ์ความสอดคล้อง (Contingency Coefficient, C)

เมื่อข้อมูลปรากฏในรูปแบบของตารางความสอดคล้องไม่ว่ากี่มิติก็ตาม มีสัมประสิทธิ์ตัวหนึ่งที่เรียกว่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้อง (Contingency coefficient, C) ใช้ได้กับทุกตารางทุกมิติ มีสูตรในการคำนวณคือ

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}}$$

มีข้อตกลงของสัมประสิทธิ์ความสอดคล้อง (C) คือ N จะต้องมากกว่า 0 และค่า C จะไม่เท่ากับ 1 ยิ่งกว่านั้นค่าสูงสุดของ C จะสัมพันธ์กับมิติของตาราง ดังนั้นตาราง 2 x 2 ค่า C สูงสุด = 0.707 สำหรับตาราง 3 x 3 ค่า C สูงสุด = 0.816 ฯ โดยทั่วไปแล้วค่า C สูงสุดจะเท่ากับ

$$C_{max} = \sqrt{(k-1)/k}$$

เมื่อ k คือ จำนวนของแถวหรือสดมภ์ที่มีค่าน้อยที่สุด

ฟี (Phi, ϕ)

ในตาราง 2 x 2 ที่ใช้ค่า χ^2 แบบปรับแก้ของเยตส์ เราจะใช้การวัดความสัมพันธ์ที่ดีที่สุดที่เรียกว่าฟี (ϕ) เป็นการนำเสนอความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ตัวแปร ในแต่ละตัวแปรเป็นตัวแปรแบ่งสอง (**D**ichotomous) ถ้ารหัสของตัวแปรเพศเป็น 1, 2 สำหรับเพศชายและหญิง และรหัสของการสูบบุหรี่เป็น 1 และไม่สูบบุหรี่เป็น 2 และนำมาสัมพันธ์กัน มีสูตรในการคำนวณค่าฟี ดังนี้

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$$

แครมเมอร์ฟี (Cramer's **Phi**, $\boldsymbol{\phi_c}$)

ค่า ฟี จะใช้กับตาราง 2 x 2 เท่านั้น จะไม่ใช้กับตารางขนาดใหญ่ เพื่อขจัดปัญหานี้ เครมเมอร์ (1946) จึงคิดค้นค่า ฟี ขึ้นมามีสูตรว่า

$$\phi_c = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}}$$

เมื่อ N คือ ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

k คือ จำนวนแถวหรือสดมภ์ที่มีค่าน้อยที่สุด

เครมเมอร์ฟี (ϕ_c) ถูกเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า เครมเมอร์วี (Cramer's V) เมื่อ k = 2 ก็คือฟี (ϕ)

ODDS Ratios

เป็นสถิติที่มีประโยชน์ โดยเฉพาะสำหรับตาราง 2 x 2 ใช้เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และผลรวมในแนวแถวและสดมภ์ไม่เท่ากัน

ตัวอย่างในการใช้ **ODDS** Ratios คือ ในการศึกษายาแอสไพริน ว่ามีผลประทบต่อหัวใจหรือไม่ ผลการทดลองแสดงในตาราง

	มีผลต่อหัวใจ	ไม่มีผลต่อหัวใจ	
กลุ่มทดลอง	104	10,933	11,037
กลุ่มควบคุม	189	10,845	11,034
	293	21,778	22,071

จากข้อมูลจะสามารถคำนวณหา **ODDS** Ratios ได้ดังนี้

$$\textbf{ODDS}\text{ Ratios} = \frac{189 / 10{,}845}{104 / 10{,}933} = \frac{0.0174274}{0.0095125} = 1.83$$

นั่นคือบุคคลในกลุ่มควบคุมจะมีโอกาสมีอาการเจ็บป่วยบริเวณหัวใจ 1.83 เท่าของกลุ่มที่ใช้ยาแอสไพริน

การวัดความสอดคล้อง (**K**appa (**K**) – A **M**easure of Agreement)

เป็นสถิติที่พัฒนาโดย โคเฮน (Cohen) ที่สำคัญโดยไม่ได้อยู่บนพื้นฐานของไคสแควร์ แต่จะใช้กับตารางความสอดคล้อง นั่นคือ **K**appa (**K**) เป็นสถิติใช้วัดความสอดคล้องของผู้ตัดสินใช้หาเมื่อเราต้องการทราบความเชื่อมั่นของการประเมิน

ตัวอย่าง ในคลินิคแห่งหนึ่งมีคนไข้ที่สงสัยว่ามีปัญหามารักษา 30 คน โดยมีหมอ 2 คน เป็นผู้วินิจฉัย ผลการวินิจฉัยของหมอแต่ละคนได้แบ่งผู้ป่วยออกเป็น 3 กลุ่มคือ 1) ไม่มีปัญหาใด ๆ 2) มีปัญหาทางจิต และ 3) มีปัญหาทางกาย เมื่อทำการสอบถามคุณหมอทั้ง 2 ถึงผลการตัดสิน เราสามารถนำมาสร้างเป็นตารางแสดงความสอดคล้องของการตัดสินของหมอ ดังแสดงในตาราง

ตาราง แสดงผลการตัดสินผู้ป่วยที่มีปัญหาทางพฤติกรรม

	ผู้ตัดสินคนที่ 1			
ผู้ตัดสินคนที่ 2	ไม่มีปัญหา	มีปัญหาทางจิต	มีปัญหาทางกาย	
ไม่มีปัญหา	15 (10.67)	2	3	20
มีปัญหาทางจิต	1	3 (1.20)	2	6
มีปัญหาทางกาย	0	1	3 (1.07)	4
	16	6	8	30

ผู้ตัดสินคนที่ 1 ได้ตัดสินว่าผู้ป่วยไม่มีปัญหาใด ๆ จำนวน 16 คน ใน 16 คนนี้ผู้ตัดสินคนที่ 2 เห็นด้วยว่าไม่มีปัญหา 15 คน อีก 1 คน เห็นว่ามีปัญหาทางจิต และ 0 คน มีปัญหาทางกาย เราจะใช้ค่าตามแนวทแยงคือ 15, 3, 3 ในการแสดงความสอดคล้องระหว่างผู้ตัดสินทั้ง 2 คน ส่วนจำนวนผู้ป่วยที่อยู่นอกเหนือแนวทแยงแสดงความไม่สอดคล้องของผู้ตัดสิน

กระบวนการง่าย ๆ ในการจัดการกับข้อมูลคือการคำนวณเปอร์เซ็นต์ความสอดคล้อง ในจำนวนผู้ป่วย 30 คน มี 21 คน (15 + 3 + 3) ที่ผู้ตัดสินมีความเห็นตรงกัน เมื่อ 21/30 = 0.7 = 70% ที่มีความเห็นสอดคล้องกัน

ในการหาค่า **K**appa เราจำเป็นต้องหาความถี่ที่คาดหวังสำหรับเซลในแนวทแยงแต่ละเซล เราจะคำนวณเหมือนการทดสอบไคสแควร์ เช่น ความถี่ที่คาดหวังของผู้ตัดสินที่เห็น

สอดคล้องกันว่าไม่มีปัญหาคือ (20 x 16)/30 = 10.67 ผู้ป่วยที่ถูกตัดสินว่ามีปัญหาทางจิต (6 x 6)/30 – 1.2 และมีปัญหาทางกาย (4 x 8)/30 = 1.07 ค่านี้แสดงในตารางข้างต้น

เราจะคำนวณหา **K**appa ได้จากสูตร

$$\mathbf{K} = \frac{\Sigma f_0 - \Sigma f_E}{N - \Sigma f_E}$$

เมื่อ f_0 มีความถี่ที่สังเกตได้ตามแนวทแยง และ f_E คือความถี่ที่คาดหวังตามแนวทแยง ดังนี้ Σf_0 = 15 + 3 + 3 = 21 และ Σf_E = 10.67 + 1.20 + 1.07 = 12.94 ดังนั้น

$$\mathbf{K} = \frac{21 - 12.94}{30 - 12.94}$$

$$= 8.06/17.06$$

$$= 0.47$$

จะสังเกตได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์แคปปาจะมีค่าต่ำกว่า 70% ที่เห็นสอดคล้องกันดังแสดงในการคำนวณข้างต้น ในการคำนวณ **K**appa เราจะได้ 47% ที่เห็นสอดคล้องภายหลังการคำนวณเพื่อปรับแก้ค่าแล้ว

บรรณานุกรม

Howell, **D**avid C. (1992). *Statistical Methods for Psychology.* Third Edition. California : Wadsworth, Inc.,

Runyon, Richard **P.** and Other. (1996). *Fundamentals of Behavioral Statistics.* U.S.A. :McGraw-Hill, 1996.

Sprinthall, Richard C. (1994). *Basic Statistical Analysis.* **F**ourth Edition. U.S.A. : Allyn and Bacon,